

ON THE REMODELLING OF ANISOTROPIC BONE TISSUE

By

Antonio DiCarlo

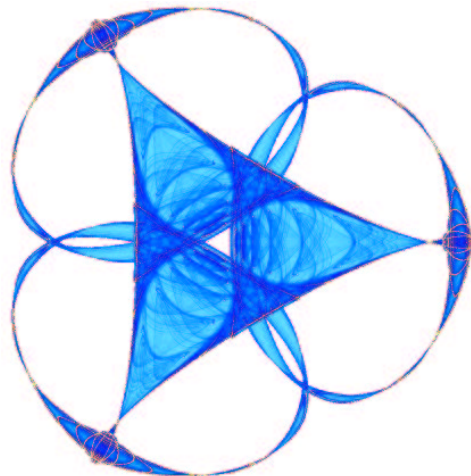
Salah Naili

and

Sara Quiligotti

IMA Preprint Series # 2051

(June 2005)



INSTITUTE FOR MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

UNIVERSITY OF MINNESOTA
400 Lind Hall
207 Church Street S.E.
Minneapolis, Minnesota 55455-0436

Phone: 612/624-6066 Fax: 612/626-7370

URL: <http://www.ima.umn.edu>

Sur le remodelage des tissus osseux anisotropes

On the remodelling of anisotropic bone tissue

Antonio DiCarlo* Salah Naili† Sara Quiligotti‡

June 8, 2005

Paper submitted to Comptes Rendus Mécanique

Contents

Abridged English version	3
1 Introduction	5
2 Cinématique	7
3 Dynamique : lois de bilan	9
4 Dynamique : théorie constitutive	9
5 Élasticité anisotrope bidimensionnelle	12
6 Remodelage passif	13
7 Conclusion et perspectives	14
Références	16

* SMFM@DiS: Strutture Matematiche della Fisica dei Materiali, Dipartimento di Strutture, Università degli Studi “Roma Tre”, Via Vito Volterra 62, I-00146 Roma (Italy) (adicarlo@mac.com).

†Laboratoire de Mécanique Physique, CNRS UMR 7052 B2OA, Faculté des Sciences et Technologie, Université Paris XII–Val-de-Marne, 61 avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cédex (France) (naili@univ-paris12.fr).

‡Laboratoire de Modélisation en Mécanique, CNRS UMR 7607, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cédex 5 (France) (sara.quiligotti@noos.fr).

Résumé

La génération de la forme des tissus biologiques invoque des phénomènes de croissance (variation des longueurs relâchées) et de remodelage (variation des propriétés mécaniques). La modélisation de ces phénomènes est de première importance sur le plan non seulement fondamental mais aussi technologique, pour le secteur de la santé. Dans le cadre d'une approche mécanique macroscopique, nous regardons le tissu osseux comme un milieu continu avec microstructure, dont les caractéristiques mécaniques locales (à cette échelle) se traduisent par un comportement linéairement élastique, anisotrope et évolutif. En particulier, la cinématique proposée est assez riche pour suivre l'évolution de la microstructure du tissu considéré, et en même temps prendre en compte le couplage existant entre contrainte, croissance et remodelage. Nous proposons donc une approche unifiée de la mécanique de la croissance et du remodelage, dans laquelle toutes les lois de bilan dérivent d'un principe des puissances virtuelles. Cette approche a été appliquée, pour le moment, à l'étude du remodelage de la raideur élastique par rotation de la microstructure dans le cas bidimensionnel, en l'absence de phénomènes de croissance volumique et de réponse physiologique aux stimuli (remodelage passif). L'analyse des résultats obtenus achève cette étude.

Abstract

Growth (change of relaxed lengths) and remodelling (change of mechanical properties) are both involved in the morphogenesis of biological tissues. To model them is of paramount import for progressing both in scientific understanding and health technologies [1, 2]. We model bone tissue as a microstructured continuum, whose mechanical properties at the macroscopic scale are described by a linear, anisotropic elastic response which evolves in time [5, 6, 10, 14]. Our kinematics is rich enough to allow for the microstructural evolution, as well as for the interplay between stress, growth and remodelling. This is a unified approach to the mechanics of growth and remodelling, in which all balance laws derive from one virtual-power principle. As a first application, we study the problem of stiffness remodelling due to planar rotation of the microstructure, excluding bulk growth and all physiological response to mechanical stimuli (passive remodelling).

Mots-clés : Biomécanique ; Croissance et remodelage ; Tissu osseux ; Principe des puissances virtuelles.

Keywords: Biomechanics; Growth and remodelling; Bone tissue; Principle of virtual power.

Abridged English version

Introduction Growth and remodelling (as defined and contrasted in the abstract) are usually studied separately [1, 3, 4, 10]. In this paper we set forth a *unified approach* to both phenomena, founded on two basic principles: virtual power and dissipation. More precisely, our theory is based on the introduction of a generalized force dual to the *microspin* which describes the remodelling velocity, along the lines established in [9], where a generalized force dual to bulk-growth velocity was introduced. In order to distinguish growth from deformation, two evolving configurations need to be associated with each body element: its *current* configuration, describing how it is actually placed in space, and its *relaxed* configuration, describing how it “would like” to be placed. The field of relaxed configurations need not be (and usually is not) compatible, not even locally. This kinematic idea, originally introduced to distinguish between elastic and viscoplastic strains [7, 8], was reinterpreted and imported into growth modelling in [4]. The original contribution by [9] is in dynamics. The theory developed in [9] is enriched here by taking into account the microstructure via a microrotation. We obtain the evolution law for bone remodelling due to microrotation as a constitutively augmented new balance, the balance or remodelling torques.

Kinematics We model a macroscopic piece of bone as a body manifold \mathcal{B} , and define its *complete motion* as the time evolution of the pair (p, \mathbf{R}) , p being its *placement* (1) and \mathbf{R} its *microrotation* (6). The Euclidean place manifold is noted \mathcal{E} , its translation space \mathcal{VE} , and \mathcal{SO} the Lie group of proper orthogonal transformations of \mathcal{VE} . As is done in [9], we also attach a *relaxed configuration* $\mathbf{P} : T\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{VE}$ to the collection of *body elements*, *i.e.*, to the tangent bundle $T\mathcal{B}$. Here, however, \mathbf{P} (noted \mathbf{P}_0) is assumed *not* to evolve in time; moreover, the body gradient of p (2) is assumed to stay near to \mathbf{P}_0 , in the sense that the difference between the *warp* \mathbf{F} (3) and the identity \mathbf{I} stays small, so that its symmetric part \mathbf{E} (5) is a fit measure of *strain*. The velocity realized along (p, \mathbf{R}) is, by definition, the pair $(\dot{p}, \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top)$, time differentiation being denoted by a superposed dot and transposition by the label $^\top$. Accordingly, the general test velocity considered at each time is a pair (\mathbf{v}, \mathbf{W}) (8), with \mathbf{v} the vector-valued *displacement velocity* and \mathbf{W} the skew-valued *microspin*. In the two-dimensional case, the rotation \mathbf{R} admits the representation (7) in terms of an angle α , whose rate $\dot{\alpha}$ times the right-angle turn \star (9) equals the microspin $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top$ (10).

Dynamics To us, a *force* is a linear real-valued functional on the space of test velocities, whose value we call the *power* (or *working*) expended by that force [11]. We use the notation: $power = \langle force, velocity \rangle$. Eqs. (11) and (12) give the power expended by the *outer* and the *inner* force, respectively, establishing a theory of

grade one in \mathbf{v} and zero in \mathbf{W} . Balance laws (13) derive from the requirement that the total power be zero for all test velocity. Eqs. (13)₁ and (13)₃ represent the standard force balance: \mathbf{S} is the stress, \mathbf{b}^i and \mathbf{b}^e are the inner and outer forces per unit reference volume, \mathbf{s} is the boundary force per unit reference area, and \mathbf{n}_0 is the outward unit normal to the reference shape of $\partial\mathcal{B}$. Eq. (13)₂ is the balance of remodelling torques, involving \mathbf{T}^i and \mathbf{T}^e , the *inner* and *outer remodelling torques* per unit reference volume. Then we concentrate on the constitutive class characterized by (14). It can be shown [12, 9] that it fulfills the requirement that changes in observer do not change the *inner* power. The *elastic stiffness* \mathbb{C} , given as a function of the microrotation \mathbf{R} in (14b), is further assumed to be equal to a given *prototype stiffness* \mathbb{C}_0 , rotated by \mathbf{R} (16). The tensor \mathbb{C} is also required to be symmetric and positive definite (15). Eq. (17) shows how rank-two tensors such as \mathbf{E} and \mathbf{S} are rotated back ([↖]) and forth ([↗]). After introducing the *free-energy density* ψ (18)–(20), we posit the *dissipation principle* (21). This principle is satisfied if and only if the inner remodelling torque \mathbf{T}^i is constitutively assigned as in (27), with a *resistance to remodelling* \mathbb{D} satisfying (28). \mathbb{D} is then assumed to be constant, its value being noted \mathbb{D}_0 . Notice that the stress \mathbf{S} and the strain \mathbf{E} appear in (27) through their *commutator*, defined in (24). *Passive remodelling* obtains if the outer remodelling torque \mathbf{T}^e is identically zero (29).

Two-dimensional anisotropic elasticity In dimension two, the elastic stiffness \mathbb{C} may be represented as in (30) in terms of two adapted deviatoric tensors \mathbf{M}, \mathbf{N} (31) and five independent moduli: $\lambda, \mu, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \kappa$; the corresponding Voigt matrix, based on definitions (32), is given in (33). If in (30) \mathbf{M} and \mathbf{N} are substituted by their rotated-back counterparts $\mathbf{M}_0, \mathbf{N}_0$ (34), this same equation gives the prototype elastic stiffness \mathbb{C}_0 . The 4th-rank tensor \mathbb{C} belongs to one out of four symmetry classes [13]: general anisotropic, orthotropic ($\kappa = 0$), tetragonal ($\tilde{\mu} = \kappa = 0$), and isotropic ($\lambda = \tilde{\mu} = \kappa = 0$). Bone tissue may be regarded as orthotropic [14], with moduli given in (37). The mapping \mathbb{C} introduced in (35) provides \mathbb{C} as a function of the angle of microrotation α . Its components, given explicitly in (36), are illustrated in Figs. 1 and 2 for the elastic moduli listed in (37).

Passive remodelling Eqs. (13)₂, (27), and (29) imply that passive remodelling of bone microstructure is governed by the (skew-valued) tensor equation (38), which reduces to the scalar form (42) in dimension two. It is biophysically sound to assume that the only strict component of \mathbb{D}_0 (40), nonnegative by (28), is in fact strictly positive for an anisotropic material. Physiological conditions prevailing in long bones are reasonably mimicked by a non null uniaxial stress (43) whose *fixed* direction coincides at time $\tau = 0$ with the *stiff* principal direction of an orthotropic material.

Eq. (44) is so obtained. Its trivial steady solution is *unstable*, for reasons illustrated in Fig. 2. This shows that not even homeostatic conditions can be maintained without an *active* control on remodelling.

Concluding remarks In this paper, based on a unified approach to growth and remodelling, we have focussed attention on the evolving mechanical properties of bone microstructure, studying in some detail a two-dimensional problem of stiffness remodelling due to microrotation alone, bulk growth being excluded. A detailed analysis of the three-dimensional problem is under way. Another ongoing development makes allowance for evolving elastic moduli, relating them to a richer microstructure, which embodies bone porosity. A major multidisciplinary effort will be required to model the mechanical effects of the biochemical control system, which have been shown to play a key physiological role.

1 Introduction

Les phénomènes de *croissance* et de *remodelage*, qui revêtent une importance fondamentale dans le cadre de l'adaptation biologique, peuvent être associés, du point de vue macromécanique, aux variations des longueurs relâchées du matériau (*croissance*) et à l'évolution des propriétés mécaniques locales du tissu, telle que la raideur élastique (*remodelage*). Leur modélisation représente, pour la physique des milieux continus, un véritable défi à relever dans le cadre de nombreux champs d'applications, non seulement de la biomécanique, mais aussi plus largement des sciences des matériaux.

L'étude de la réponse mécanique d'un tissu biologique, soumis à des sollicitations dynamiques dans des conditions physiologiques ou pathologiques, représente une étape fondamentale pour le développement de méthodologies innovantes dans le cadre des biotechnologies et de l'ingénierie médicale, comme par exemple la conception de prothèses ou la mise au point de matériaux à haute biocompatibilité. En outre, la modélisation macroscopique des interactions mécaniques dans les tissus biologiques peut naturellement apporter une contribution pertinente et significative à une meilleure compréhension des mécanismes qui gouvernent l'évolution de la croissance et du remodelage, tels que la différenciation cellulaire, la cicatrisation ou la consolidation des fractures osseuses [1].

La première description de la croissance des organismes vivants peut être attribuée à D'Arcy Thompson [2]. Cowin et Hegedus [3] ont modélisé le remodelage et la croissance du tissu osseux par l'addition de matière laquelle prend place dans les pores de la matrice solide du milieu poreux. Cette approche suppose que la matière ajoutée se produit sans interagir, du point de vue mécanique, avec la matrice solide

préexistante. Rodriguez *et al.* [4] ont reformulé une cinématique de la croissance volumique en tenant compte du couplage entre la contrainte et la croissance induit par le dépôt (apposition) ou le retrait (résorption) de matière.

Dans cette étude, on se place dans le cadre de la mécanique des milieux continus à une échelle mésoscopique (particules de quelques mm [5]) où l'on ne considère pas la microstructure en tant que telle mais le comportement apparent qui en résulte et qui permet de rendre compte de la non-uniformité macroscopique. A cette échelle, le tissu osseux ne peut être considéré qu'anisotrope ; en outre, un comportement linéairement élastique [6] est très bien vérifié localement. Les mécanismes biochimiques qui président le remodelage sortent du cadre de ce travail, où on se borne à déterminer les conséquences du remodelage sur la microstructure osseuse. En outre, dans l'exemple proposé, on s'intéresse à l'évolution de la microstructure en l'absence de réponse physiologique aux stimuli (remodelage passif). Les résultats de cette analyse préliminaire montrent très bien le rôle décisif joué par une réponse physiologique active et contrôlée, même en conditions homéostatiques.

Afin de distinguer la *croissance* de la *déformation* élastique, deux configurations différentes, qui évoluent indépendamment l'une de l'autre, sont associées à chaque élément matériel du corps considéré : sa configuration *actuelle*, qui décrit comment l'élément *est* placé dans l'espace à un instant donné, et sa configuration *relâchée*, qui décrit comment l'élément *serait* placé dans l'espace à cet instant, *s'il était isolé de ses voisins*. La configuration relâchée est donc, en général, une configuration incompatible, qui ne peut être obtenue qu'en découpant chaque élément matériel du milieu environnant, le libérant ainsi des contraintes appliquées [4].

Le gradient du *placement* peut donc être décomposé, en suivant une idée exploitée à l'origine en mécanique des grandes déformations elastoplastiques [7, 8], en un produit de champs tensoriels qui décrivent respectivement une *accommodation élastique* et une *croissance volumique*. De tels champs tensoriels ne peuvent pas être considérés comme des gradients. En effet, si chaque élément matériel s'accroît sans accommodation élastique, alors à l'issue du processus de croissance l'ensemble des éléments considérés ne serait plus, en général, géométriquement compatible. Pour que leur assemblage soit possible dans le cadre de la configuration actuelle du tissu, il faut donc *déformer élastiquement* ces éléments. L'existence d'une contrainte résiduelle, due à l'incompatibilité géométrique de la croissance volumique, a déjà été étudiée et validée expérimentalement pour les tissus biologiques mous [1].

Les phénomènes biologiques de croissance et de remodelage sont habituellement étudiés à l'aide de modèles mécaniques distincts. Dans le présent travail, nous proposons une *approche unifiée* de ces deux phénomènes évolutifs, fondée sur les principes des puissances virtuelles et de dissipation. Plus précisément, la théorie proposée repose sur l'introduction d'une force généralisée associée, par dualité, au champ tensoriel qui décrit la *vitesse de remodelage de la microstructure*, suivant la même

démarche avec laquelle on a introduit [9] une force généralisée associée au champ tensoriel de la vitesse d'accroissement volumique.

Dans la deuxième partie de l'article, la théorie proposée a été appliquée à l'étude du remodelage par rotation de la microstructure dans le cas bidimensionnel. Les résultats de cette étude permettent de mettre en perspective, du point de vue théorique, les résultats trouvés par Watzky et Naili [10] dans le cadre d'une approche phénoménologique.

2 Cinématique

Nous regardons le milieu osseux comme une variété régulière (ouverte) \mathcal{B} , de frontière $\partial\mathcal{B}$. Son *placement* p est défini par le plongement :

$$p : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (1)$$

où \mathcal{E} est la variété euclidienne des positions, dont l'espace des translations associé est l'espace vectoriel des déplacements, noté \mathcal{VE} .

L'*élément matériel* $T_b\mathcal{B}$ correspondant au point matériel $b \in \mathcal{B}$ est défini comme l'espace tangent à \mathcal{B} en b . On notera pour la suite ∇p le gradient matériel du placement p , c'est-à-dire le champ tensoriel qui associe à chaque $b \in \mathcal{B}$ l'application linéaire et bijective définie par :

$$\nabla p|_b : T_b\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{VE}. \quad (2)$$

En suivant une idée de Rodriguez *et al.* [4] sous la forme développée dans [9], on regarde la *croissance volumique* comme l'évolution de la configuration *relâchée* des éléments matériels que l'on obtient, en principe, lorsqu'on isole chaque élément matériel de ses voisins. Par définition, cette configuration élémentaire ne peut pas être décrite, en général, par un placement tel que (1). Pour tenir compte de l'incompatibilité géométrique associée à la croissance volumique, on introduit alors le champ tensoriel régulier \mathbf{P} , indépendant de p , lequel agit comme ∇p dans (2) sans être pourtant, en général, le gradient d'un placement.

Pour la suite, on focalisera l'attention sur des mouvements réguliers tels que ∇p reste proche d'une configuration relâchée *fixée* dans le temps. Cette configuration élémentaire, notée \mathbf{P}_0 , sera prise comme référence dans le procédé de linéarisation. La *distorsion* \mathbf{F} , définie par :

$$\mathbf{F} := (\nabla p)(\mathbf{P}_0)^{-1} \quad (3)$$

pourra donc être utilement décomposée en la somme :

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}, \quad (4)$$

où \mathbf{I} est le champ constant qui donne l'identité dans $\mathcal{VE} \otimes \mathcal{VE}$ (où \otimes désigne le produit tensoriel) et le champ \mathbf{H} est petit par rapport à \mathbf{I} . La partie symétrique de \mathbf{H} donne le champ de *déformation infinitésimale* défini par :

$$\mathbf{E} := \text{sym } \mathbf{H}. \quad (5)$$

Le milieu continu considéré est également doté d'une *microstructure* qui, à chaque instant, est caractérisée par un champ tensoriel de *rotation de la microstructure* :

$$\mathbf{R} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{SO}, \quad (6)$$

où \mathcal{SO} représente le groupe de Lie des transformations orthogonales de \mathcal{VE} qui en préservent l'orientation. Dans le cas plan, \mathcal{SO} est paramétré par un angle; par conséquent, le champ \mathbf{R} admet en tout point la représentation matricielle :

$$[\mathbf{R}] = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

dans une base locale orthonormée quelconque, où l'angle α dépend de la base locale choisie.

En conclusion, le mouvement complet du milieu continu est décrit par l'évolution temporelle du triplet $(p, \mathbf{P}, \mathbf{R})$, qui se réduit au couple (p, \mathbf{R}) lorsque la configuration relâchée n'évolue pas dans le temps. Dans cette étude, la vitesse associée au mouvement complet se limitera au couple $(\dot{p}, \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top)$, où la dérivée temporelle est désignée par un point superposé et l'opérateur transposé par $^\top$. A chaque instant, on va donc considérer comme vitesses virtuelles des *vitesses de déplacement* à valeurs dans \mathcal{VE} et des *vitesses de remodelage de la microstructure* à valeurs dans l'espace des tenseurs antisymétriques $\text{Skw} := \text{skw}(\mathcal{VE} \otimes \mathcal{VE})$:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{W}) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{VE} \times \text{Skw}. \quad (8)$$

Dans le cas plan, l'espace Skw est engendré par l'application \star obtenue par la *rotation d'un angle droit*, qui, dans toute base orthonormée, admet la représentation matricielle :

$$[\star] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Pour tout $\mathbf{W} : \mathcal{B} \rightarrow \text{Skw}$, il existe donc un champ scalaire ω tel que $\mathbf{W} = \omega \star$. Finalement, si la base locale ne dépend pas du temps, on déduit de la représentation (7) l'expression :

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top = \dot{\alpha} \star. \quad (10)$$

3 Dynamique : lois de bilan

Suivant Germain [11], nous introduisons les *forces* comme des applications linéaires (continues) à valeurs réelles, définies sur l'espace des vitesses virtuelles (doté d'une topologie appropriée), leur valeur étant la *puissance virtuelle* qu'elles développent. On utilisera la notation : $\text{puissance} = \langle \text{force}, \text{vitesse} \rangle$.

Nous admettons donc que, pour toute vitesse virtuelle (\mathbf{v}, \mathbf{W}) , la puissance virtuelle développée par la *force extérieure* \mathbf{f}^e est donnée par l'intégrale :

$$P^e = \langle \mathbf{f}^e, (\mathbf{v}, \mathbf{W}) \rangle_{\mathcal{B}} = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{b}^e \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T}^e \cdot \mathbf{W}) + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}, \quad (11)$$

où le champ \mathbf{b}^e représente la force extérieure ordinaire par unité de volume de référence et le champ \mathbf{s} la force surfacique ordinaire agissant sur la frontière $\partial \mathcal{B}$ par unité d'aire de référence (tous les deux à valeurs dans \mathcal{VE}); en outre, le champ \mathbf{T}^e (à valeurs dans Skw) représente le *couple des efforts volumiques extérieurs* associé au remodelage. La puissance virtuelle développée par la *force intérieure* \mathbf{f}^i est quant à elle donnée par l'intégrale :

$$P^i = \langle \mathbf{f}^i, (\mathbf{v}, \mathbf{W}) \rangle_{\mathcal{B}} = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{b}^i \cdot \mathbf{v} - \mathbf{S} \cdot (\text{D}_0 \mathbf{v}) + \mathbf{T}^i \cdot \mathbf{W}), \quad (12)$$

où le champ \mathbf{b}^i (à valeurs dans \mathcal{VE}) représente la force intérieure ordinaire par unité de volume de référence et le champ \mathbf{S} (à valeurs dans $\mathcal{VE} \otimes \mathcal{VE}$, comme $\text{D}_0 \mathbf{v} := (\nabla \mathbf{v})(\mathbf{P}_0)^{-1}$) la contrainte usuelle; en outre, le champ \mathbf{T}^i (à valeurs dans Skw) représente le *couple des efforts volumiques intérieurs* associé au remodelage. On notera que la théorie proposée est une théorie du premier gradient en \mathbf{v} et de gradient zéro en \mathbf{W} .

Les lois de bilan dérivent du fait que la somme des puissances virtuelles $P^i + P^e$ doit être nulle pour toute vitesse virtuelle; on obtient alors les équations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Div}_0 \mathbf{S} + \mathbf{b}^i + \mathbf{b}^e = \mathbf{0}, \\ \mathbf{T}^i + \mathbf{T}^e = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \mathcal{B}; \\ \text{sur } \partial \mathcal{B}. \end{array} \quad (13)$$

$$\mathbf{S} \mathbf{n}_0 = \mathbf{s}$$

La quantité $\text{Div}_0 \mathbf{S}$ est le champ qui satisfait la relation : $\mathbf{I} \cdot \text{D}_0(\mathbf{S}^\top \mathbf{v}) = (\text{Div}_0 \mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S} \cdot \text{D}_0 \mathbf{v}$, pour tout champ \mathbf{v} ; la quantité \mathbf{n}_0 est le champ des vecteurs unimodulaires normaux à $\partial \mathcal{B}$ et sortant de \mathcal{B} dans la configuration \mathbf{P}_0 de référence.

4 Dynamique : théorie constitutive

Nous considérons une classe de matériaux particuliers, mais assez riche pour la modélisation des phénomènes envisagés, en supposant que les lois de comportement

des actions mécaniques intérieures \mathbf{b}^i , \mathbf{S} et \mathbf{T}^i admettent la représentation suivante :

$$\mathbf{b}^i(b, \tau) = \widehat{\mathbf{b}}^i_{(b, \tau)}(p, \mathbf{R}) = \mathbf{0}, \quad (14a)$$

$$\mathbf{S}(b, \tau) = \widehat{\mathbf{S}}_{(b, \tau)}(p, \mathbf{R}) = \check{\mathbf{C}}_b(\mathbf{R}(b, \tau)) \mathbf{E}(b, \tau), \quad (14b)$$

$$\mathbf{T}^i(b, \tau) = \widehat{\mathbf{T}}^i_{(b, \tau)}(p, \mathbf{R}) = \check{\mathbf{T}}^i_b(\mathbf{E}(b, \tau), \mathbf{R}(b, \tau), (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^\top)(b, \tau)). \quad (14c)$$

Suivant la démarche proposée dans [12, 9], on peut montrer que les lois (14) respectent le principe que la puissance virtuelle développée par la force *intérieure* soit identique pour tout observateur. En outre, l'application $\check{\mathbf{C}}_b : \mathcal{SO} \rightarrow \text{Sym} \otimes \text{Sym}$ donne la *raideur élastique* $\mathbb{C}(b, \tau)$ en fonction de la rotation de la microstructure $\mathbf{R}(b, \tau)$, où $\text{Sym} := \text{sym}(\mathcal{VE} \otimes \mathcal{VE})$ désigne l'espace des tenseurs symétriques. La raideur élastique doit satisfaire les propriétés de symétrie et de positivité :

$$(\mathbb{C} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = (\mathbb{C} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Sym}; \quad (15a)$$

$$(\mathbb{C} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} > 0, \quad \forall \mathbf{A} \in \text{Sym} \setminus \{\mathbf{O}\}. \quad (15b)$$

Nous spécialiserons ultérieurement la façon dont la raideur élastique du matériau dépend de la microstructure, en assumant que $\mathbb{C}(b, \tau)$ est donné par une *raideur prototype* $\mathbb{C}_0(b)$, indépendante du temps, *ournée* par $\mathbf{R}(b, \tau)$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{C} : \mathbf{E} \mapsto \mathbf{R} (\mathbb{C}_0(\mathbf{R}^\top \mathbf{E} \mathbf{R})) \mathbf{R}^\top. \quad (16)$$

Pour abrégé, on notera :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^\triangleleft &:= \mathbf{R}^\top \mathbf{E} \mathbf{R}, \\ \mathbb{C} \mathbf{E} &= (\mathbb{C}_0(\mathbf{E}^\triangleleft))^\triangleright := \mathbf{R} (\mathbb{C}_0(\mathbf{E}^\triangleleft)) \mathbf{R}^\top, \end{aligned} \quad (17a)$$

ce qui se traduit en terme de comportement par :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^\triangleleft &:= \mathbb{C}_0(\mathbf{E}^\triangleleft), \\ \mathbf{S} &= \mathbb{C} \mathbf{E} = (\mathbf{S}^\triangleleft)^\triangleright. \end{aligned} \quad (17b)$$

Nous admettons aussi l'existence d'une *énergie libre*, additive et reliée au mouvement complet. À un instant donné, l'énergie libre disponible pour chaque sous-domaine $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ est l'intégrale sur \mathcal{P} de sa densité ψ par unité de volume dans la configuration relâchée de référence :

$$\Psi(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \psi. \quad (18)$$

Étant donné que ni le sous-domaine ni le volume ne dépendent du temps, on a également :

$$\dot{\Psi}(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \dot{\psi}. \quad (19)$$

La caractérisation de la classe de matériaux envisagée est complétée par l'hypothèse :

$$\psi(b, \tau) = \widehat{\psi}_{(b, \tau)}(p, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} (\mathbb{C}(b, \tau) \mathbf{E}(b, \tau)) \cdot \mathbf{E}(b, \tau) = \frac{1}{2} \mathbf{S}(b, \tau) \cdot \mathbf{E}(b, \tau). \quad (20)$$

Dans le cadre d'une théorie purement mécanique, nous imposons un *principe de dissipation* qui peut s'écrire sous sa forme locale :

$$\dot{\psi} \leq \mathbf{S} \cdot (D_0 \dot{p}) - \mathbf{T}^i \cdot (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top). \quad (21)$$

Ce principe doit être satisfait le long de tout mouvement complet (p, \mathbf{R}) par les champs \mathbf{S}, \mathbf{T}^i et ψ ; on notera également que $D_0 \dot{p} := (\nabla \dot{p})(\mathbf{P}_0)^{-1} = \dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{H}}$. La dérivée de la densité d'énergie libre (20) s'écrit :

$$\dot{\psi} = \frac{1}{2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}) \cdot = \frac{1}{2} (\mathbf{S}^\triangleleft \cdot \mathbf{E}^\triangleleft) \cdot = (\mathbb{C}_0(\mathbf{E}^\triangleleft)) \cdot (\mathbf{E}^\triangleleft) \cdot = \mathbf{S}^\triangleleft \cdot (\mathbf{E}^\triangleleft) \cdot, \quad (22)$$

où on a noté $(\cdot) \cdot$ la dérivée temporelle de la quantité entre parenthèses. En outre, d'après (17) :

$$(\mathbf{E}^\triangleleft) \cdot = (\dot{\mathbf{E}} - (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top) \mathbf{E} + \mathbf{E} (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top))^\triangleleft = (\dot{\mathbf{E}} - [\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top, \mathbf{E}])^\triangleleft. \quad (23)$$

Dans cette relation, on a introduit le *commutateur* défini par :

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] := \mathbf{A} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{V} \mathcal{E} \otimes \mathcal{V} \mathcal{E}. \quad (24)$$

On notera que si $\mathbf{A} \in \text{Skw}$ et $\mathbf{B} \in \text{Sym}$, alors $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \in \text{Sym}$; si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Sym}$, alors $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \in \text{Skw}$. On déduit donc l'expression finale :

$$\dot{\psi} = \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}} - [\mathbf{S}, \mathbf{E}] \cdot (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top), \quad (25)$$

qui, substituée dans l'inégalité (21), donne l'*inégalité réduite* :

$$(\mathbf{T}^i - [\mathbf{S}, \mathbf{E}]) \cdot (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top) \leq 0. \quad (26)$$

Par conséquent, pour que l'application $\check{\mathbf{T}}_b^i$ introduite dans (14c) satisfasse le principe (21), il faut et il suffit qu'elle ait la structure suivante :

$$\mathbf{T}^i(b, \tau) = [\mathbf{S}(b, \tau), \mathbf{E}(b, \tau)] - \check{\mathbb{D}}_b(\mathbf{E}(b, \tau), \mathbf{R}(b, \tau), (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top)(b, \tau)) (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top)(b, \tau), \quad (27)$$

où la valeur de l'application $\check{\mathbb{D}}_b: \text{Sym} \times \mathcal{S} \mathcal{O} \times \text{Skw} \rightarrow \text{Skw} \otimes \text{Skw}$ s'interprète comme la *résistance au remodelage* $\mathbb{D}(b, \tau)$, laquelle doit satisfaire la propriété :

$$(\mathbb{D} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} \geq 0, \quad \forall \mathbf{A} \in \text{Skw}. \quad (28)$$

On assumera ici que la résistance au remodelage $\mathbb{D}(b, \tau)$ ne dépend ni de la déformation $\mathbf{E}(b, \tau)$, ni de la rotation de la microstructure $\mathbf{R}(b, \tau)$, ni de la vitesse de remodelage $(\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top)(b, \tau)$. Autrement dit, on assumera que l'application $\check{\mathbb{D}}_b$ est *constante*; sa valeur sera notée $\mathbb{D}_0(b)$.

En outre, pour considérer le cas du *remodelage passif*, il suffit de supposer que le couple *extérieur* \mathbf{T}^e est nul, quel que soit le mouvement complet :

$$\mathbf{T}^e(b, \tau) = \widehat{\mathbf{T}}_{(b, \tau)}^e(p, \mathbf{R}) = \mathbf{O}. \quad (29)$$

5 Élasticité anisotrope bidimensionnelle

Soulignons que les résultats obtenus pour les lois de bilan et la théorie constitutive sont valables pour une dimension quelconque de l'espace. À partir de cette section, on se restreint au cas bidimensionnel. En outre, tous les champs seront évalués en un point et à un instant donnés, que l'on évitera de noter explicitement.

Quelle que soit la raideur élastique \mathbb{C} , on peut toujours choisir (au moins) une base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ appropriée de \mathcal{VE} telle que :

$$\mathbb{C} = (\lambda + \mu) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mu (\mathbf{M} \otimes \mathbf{M} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) + \tilde{\lambda} (\mathbf{M} \otimes \mathbf{M} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) + \tilde{\mu} \mathbf{I} \vee \mathbf{M} + \kappa \mathbf{I} \vee \mathbf{N}, \quad (30)$$

où, suivant [12], on a introduit les *déviateurs* définis par :

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{N} = \mathbf{e}_1 \vee \mathbf{e}_2 := \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1; \quad (31a)$$

c'est-à-dire, dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{N}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (31b)$$

Dans (30), comme dans (31a)₂, on a noté \vee le produit tensoriel symétrisé :

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{VE} \otimes \mathcal{VE}. \quad (31c)$$

L'anisotropie du matériau est caractérisée en général par cinq modules élastiques *indépendants*, notés $\lambda, \mu, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \kappa$. Si $\kappa = 0$, le matériau est *orthotrope* ; si, de plus, $\tilde{\mu} = 0$, il est *tétragonal* ; si, de plus, $\tilde{\lambda} = 0$, on a un matériau *isotrope*, caractérisé par les deux coefficients de Lamé λ, μ [13]. La représentation matricielle de Voigt est définie par :

$$[\mathbf{S}] = [\mathbb{C}] [\mathbf{E}], \quad [\mathbf{E}] := (E_{11}, E_{22}, 2E_{12}), \quad [\mathbf{S}] := (S_{11}, S_{22}, S_{12}), \quad (32)$$

où $E_{ij} := \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{E} \mathbf{e}_j)$ et $S_{ij} := \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{S} \mathbf{e}_j)$. Dans cette représentation, l'expression (30) prend la forme :

$$[\mathbb{C}] := \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1112} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2212} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1212} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \tilde{\lambda} + 2(\mu + \tilde{\mu}) & \lambda - \tilde{\lambda} & \kappa \\ \lambda - \tilde{\lambda} & \lambda + \tilde{\lambda} + 2(\mu - \tilde{\mu}) & \kappa \\ \kappa & \kappa & \mu - \tilde{\lambda} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

La raideur prototype \mathbb{C}_0 est évidemment donnée par la même expression (30), pourvu que \mathbf{M} et \mathbf{N} y soient substituées respectivement par :

$$\mathbf{M}_0 := \mathbf{M}^\triangleleft = \mathbf{R}^\top \mathbf{M} \mathbf{R}, \quad \mathbf{N}_0 := \mathbf{N}^\triangleleft = \mathbf{R}^\top \mathbf{N} \mathbf{R}. \quad (34)$$

À travers les définitions (7) et (34), la représentation de la raideur actuelle \mathbb{C} en fonction de \mathbf{M}_0 et \mathbf{N}_0 fait apparaître l'angle de rotation de la microstructure α :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = \mathbb{C}(\alpha) := & (\lambda + \mu) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mu (\mathbf{M}_0 \otimes \mathbf{M}_0 + \mathbf{N}_0 \otimes \mathbf{N}_0) + \\ & \tilde{\lambda} \cos(4\alpha) (\mathbf{M}_0 \otimes \mathbf{M}_0 - \mathbf{N}_0 \otimes \mathbf{N}_0) + \tilde{\lambda} \sin(4\alpha) \mathbf{M}_0 \vee \mathbf{N}_0 + \\ & (\tilde{\mu} \cos(2\alpha) - \kappa \sin(2\alpha)) \mathbf{I} \vee \mathbf{M}_0 + (\tilde{\mu} \sin(2\alpha) + \kappa \cos(2\alpha)) \mathbf{I} \vee \mathbf{N}_0. \end{aligned} \quad (35)$$

La représentation de Voigt correspondante, liée à la base $(\mathbf{e}_1^\triangleleft, \mathbf{e}_2^\triangleleft) = (\mathbf{R}^\top \mathbf{e}_1, \mathbf{R}^\top \mathbf{e}_2)$, donne les modules (notés $c_{ijkl}^\triangleleft(\alpha)$) qui correspondent à la direction paramétrée par α (pour $\alpha=0$ on retombe sur (33) : $c_{ijkl}^\triangleleft(0) = c_{ijkl}$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{1111}^\triangleleft(\alpha) = \lambda + 2\mu + \tilde{\lambda} \cos(4\alpha) + 2\tilde{\mu} \cos(2\alpha) - 2\kappa \sin(2\alpha), \\ c_{2222}^\triangleleft(\alpha) = \lambda + 2\mu + \tilde{\lambda} \cos(4\alpha) - 2\tilde{\mu} \cos(2\alpha) - 2\kappa \sin(2\alpha), \\ c_{1122}^\triangleleft(\alpha) = \lambda - \tilde{\lambda} \cos(4\alpha), \\ c_{1212}^\triangleleft(\alpha) = \mu - \tilde{\lambda} \cos(4\alpha), \\ c_{1112}^\triangleleft(\alpha) = \tilde{\lambda} \sin(4\alpha) + \tilde{\mu} \sin(2\alpha) + \kappa \cos(2\alpha), \\ c_{2212}^\triangleleft(\alpha) = -\tilde{\lambda} \sin(4\alpha) + \tilde{\mu} \sin(2\alpha) + \kappa \cos(2\alpha). \end{array} \right. \quad (36)$$

Les fonctions (36) sont représentées dans les figures 1 et 2 pour des valeurs de modules élastiques typiques du tissu osseux *orthotrope* [14] :

$$\lambda = 13.42 \text{ GPa}, \quad \mu = 5.04 \text{ GPa}, \quad \tilde{\lambda} = 1.93 \text{ GPa}, \quad \tilde{\mu} = 2.29 \text{ GPa}, \quad \kappa = 0. \quad (37)$$

6 Remodelage passif

D'après les résultats donnés par les équations (13)₂, (27) et (29), le remodelage passif de la microstructure du tissu osseux est donc régi par l'équation tensorielle (à valeurs dans Skw) :

$$\mathbb{D}_0 (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top) = [\mathbf{S}, \mathbf{E}]. \quad (38)$$

Dans le cas bidimensionnel, la vitesse de remodelage $\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^\top$ est donnée par (10) et le crochet $[\mathbf{S}, \mathbf{E}]$ par :

$$[\mathbf{S}, \mathbf{E}] = [S_{12} (E_{11} - E_{22}) - E_{12} (S_{11} - S_{22})] \star. \quad (39)$$

On en déduit que la résistance au remodelage $\mathbb{D}_0 \in \text{Skw} \otimes \text{Skw}$ est représentée par :

$$\mathbb{D}_0 = \frac{1}{2} d_0 (\star \otimes \star), \quad (40)$$

avec d_0 réel. Il est raisonnable d'assumer que $d_0 > 0$ pour un matériau qui n'est pas isotrope, et que $d_0 = 0$ dans le cas contraire. En introduisant les paramètres de déformation :

$$\vartheta := E_{11}^{\triangleleft} + E_{22}^{\triangleleft}, \quad \delta := E_{11}^{\triangleleft} - E_{22}^{\triangleleft}, \quad \gamma := 2 E_{12}^{\triangleleft} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\vartheta \mathbf{I} + \delta \mathbf{M}_0 + \gamma \mathbf{N}_0); \quad (41)$$

où on a noté $E_{ij}^{\triangleleft} := \mathbf{e}_i^{\triangleleft} \cdot (\mathbf{E} \mathbf{e}_j^{\triangleleft})$, on peut donc réduire l'équation (38) à la forme scalaire :

$$d_0 \dot{\alpha} = m(\alpha, \mathbf{E}) := \tilde{\lambda} (\delta^2 - \gamma^2) \sin(4\alpha) - 2\tilde{\lambda} \delta \gamma \cos(4\alpha) + (\tilde{\mu} \vartheta \delta + \kappa \vartheta \gamma) \sin(2\alpha) + (\kappa \vartheta \delta - \tilde{\mu} \vartheta \gamma) \cos(2\alpha). \quad (42)$$

La fonction m est nulle si, et seulement si, le matériau est isotrope ($\tilde{\lambda} = \tilde{\mu} = \kappa = 0$); en outre, $m(\cdot, \mathbf{E})$ est nulle si la déformation est sphérique ($\delta = \gamma = 0$); $(\pi/2)$ -périodique pour un matériau tétragonal ($\tilde{\mu} = \kappa = 0$); π -périodique pour un matériau orthotrope ou complètement anisotrope, à moins que la déformation soit déviatorique ($\vartheta = 0$), cas pour lequel on retombe sur la périodicité précédente. Sans approfondir l'analyse de l'équation (42), qui est tout à fait élémentaire, nous nous bornons à discuter brièvement la solution qu'elle fournit quand on assigne une contrainte *uniaxiale* d'intensité non nulle $\sigma(\tau)$ dans une direction *fixée* qui, au temps $\tau = 0$, coïncide avec la direction principale *raide* \mathbf{e}_1 :

$$\mathbf{S}(\tau) = \sigma(\tau) \mathbf{e}_1^{\triangleleft} \otimes \mathbf{e}_1^{\triangleleft} \quad \forall \tau \in [0, \infty[. \quad (43)$$

Cette situation mime assez bien les conditions physiologiques dans les os longs. Avec ces données, l'équation (42) prend la forme adimensionnée :

$$\left(d_0 \frac{c_{1111}}{\sigma(\tau)^2} \right) \dot{\alpha}(\tau) = \varpi(\alpha(\tau)) := c_{1111} m(\alpha(\tau), \mathbf{C}(\alpha(\tau))^{-1} (\mathbf{e}_1^{\triangleleft} \otimes \mathbf{e}_1^{\triangleleft})). \quad (44)$$

Puisque $\varpi(0) = 0$, le problème (44) avec la condition initiale $\alpha(0) = 0$ possède la solution *stationnaire* nulle : $\alpha(\tau) = 0, \forall \tau \in [0, \infty[$; mais $\varpi'(0) > 0$ (voir Fig. 2), donc cette solution est *instable*. Ce résultat démontre qu'un contrôle *actif* du remodelage ($\mathbf{T}^e \neq \mathbf{O}$) est nécessaire même pour assurer la simple homéostasie.

7 Conclusion et perspectives

Cet article propose, dans le cadre de la mécanique des milieux continus, un modèle unifié de la croissance et du remodelage des tissus osseux, prenant en compte le couplage existant entre la croissance volumique et la contrainte résiduelle engendrée.

Les équations de bilan sont obtenues à l'aide d'un principe des puissances virtuelles, alors qu'un principe de dissipation borne strictement la loi qui gouverne

l'évolution de la microstructure. La démarche proposée fournit donc un moyen à la fois puissant et naturel d'obtenir non seulement les équations de bilan relatives aux grandeurs mécaniques usuelles, mais aussi celles qui gouvernent le remodelage.

L'approche méthodologique proposée a été finalement appliquée à l'étude du remodelage de la microstructure dans le cas bidimensionnel en l'absence de croissance volumique, dans le but de concentrer l'attention sur l'évolution temporelle des caractéristiques mécaniques de la microstructure du tissu osseux.

L'étude détaillée du problème tridimensionnel est en cours d'élaboration ainsi que l'introduction, dans le modèle, d'une dépendance fonctionnelle entre les modules élastiques et la microstructure, enrichie par des informations sur la porosité du tissu considéré. L'étude de ces phénomènes mérite des efforts pluridisciplinaires pour la modélisation des actions mécaniques générées par le système de contrôle bio-chimique, manifestement nécessaire à réaliser les conditions physiologiques observées.

Remerciements

Ce travail a été entamé durant le séjour de A. DiCarlo à l'Université Paris XII-Val-de-Marne sur invitation et financement du Conseil Scientifique. En outre, S. Quiligotti est reconnaissante pour le support partiel qui lui a été fourni dans le cadre du projet de recherche France-Berkeley. Finalement, les auteurs remercient Luciano Teresi pour l'assistance donnée dans le contrôle des calculs et la mise au point des figures.

Références

- [1] L. A. Taber. Biomechanics of growth, remodeling, and morphogenesis. *Appl. Mech. Rev.*, 48:487–545, 1995.
- [2] W. D’Arcy Thompson. *On Growth and Form*. Cambridge Univ. Press, 1942.
- [3] S. C. Cowin and D. H. Hegedus. Bone remodeling I: theory of adaptive elasticity. *J. Elasticity*, 6:313–326, 1976.
- [4] E. K. Rodriguez, A. Hoger, and A. D. McCulloch. Stress-dependent finite growth in soft elastic tissues. *J. Biomech.*, 27:455–467, 1994.
- [5] T.P. Harrigan, M. Jasty, R.W. Mann, and W.H. Harris. Limitations of the continuum assumption in cancellous bone. *J. Biomechanics*, 21:269–275, 1988.
- [6] G. Yang, J. Kabel, B. van Rietbergen, A. Odgaard, R. Huyskes, and S.C. Cowin. The anisotropic Hooke’s law for cancellous bone and wood. *J. Elasticity*, 53:125–146, 1999.
- [7] E. Kröner. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 4:273–334, 1960.
- [8] E.H. Lee. Elastic-plastic deformation at finite strains. *ASME J. Appl. Mech.*, 36:1–6, 1969.
- [9] A. DiCarlo and S. Quiligotti. Growth and balance. *Mech. Res. Comm.*, 29:449–456, 2002.
- [10] A. Watzky and S. Naili. Orthotropic bone remodeling: case of plane stresses. *Mech. Res. Comm.*, 31:617–625, 2004.
- [11] P. Germain. The method of virtual power in Continuum Mechanics. Part II: Microstructure. *SIAM J. Appl. Math.*, 25:556–575, 1973.
- [12] A. DiCarlo and P. Nardinocchi. On the torsion of soft cylindrical shells. In: *Trends in Applications of Mathematics to Mechanics* (Iooss G. et al., eds.), Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 106:14–25, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.
- [13] M. Vianello. An integrity basis for plane elasticity tensors. *Arch. Mech.*, 49:197–208, 1997.
- [14] J.L. Katz and A. Meunier. The elastic anisotropy of bone. *J. Biomechanics*, 20:1063–1070, 1987.

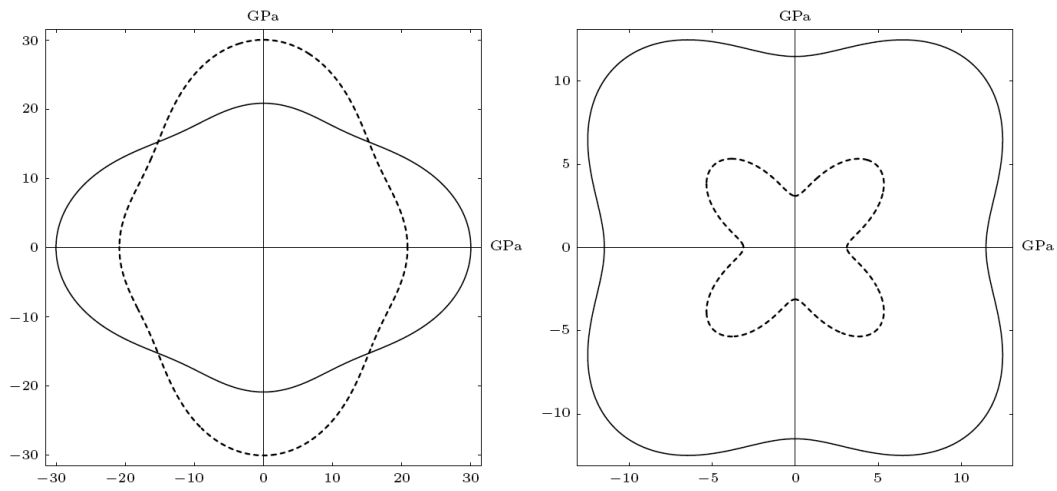


FIG. 1 – Représentation polaire des fonctions c_{1111}^4 (à gauche, en trait continu), c_{2222}^4 (à gauche, en pointillé), c_{1122}^4 (à droite, en trait continu) et c_{1212}^4 (à droite, en pointillé).

FIG. 1 – Polar representation of functions c_{1111}^4 (left, solid line), c_{2222}^4 (left, dashed line), c_{1122}^4 (right, solid line), and c_{1212}^4 (right, dashed line).

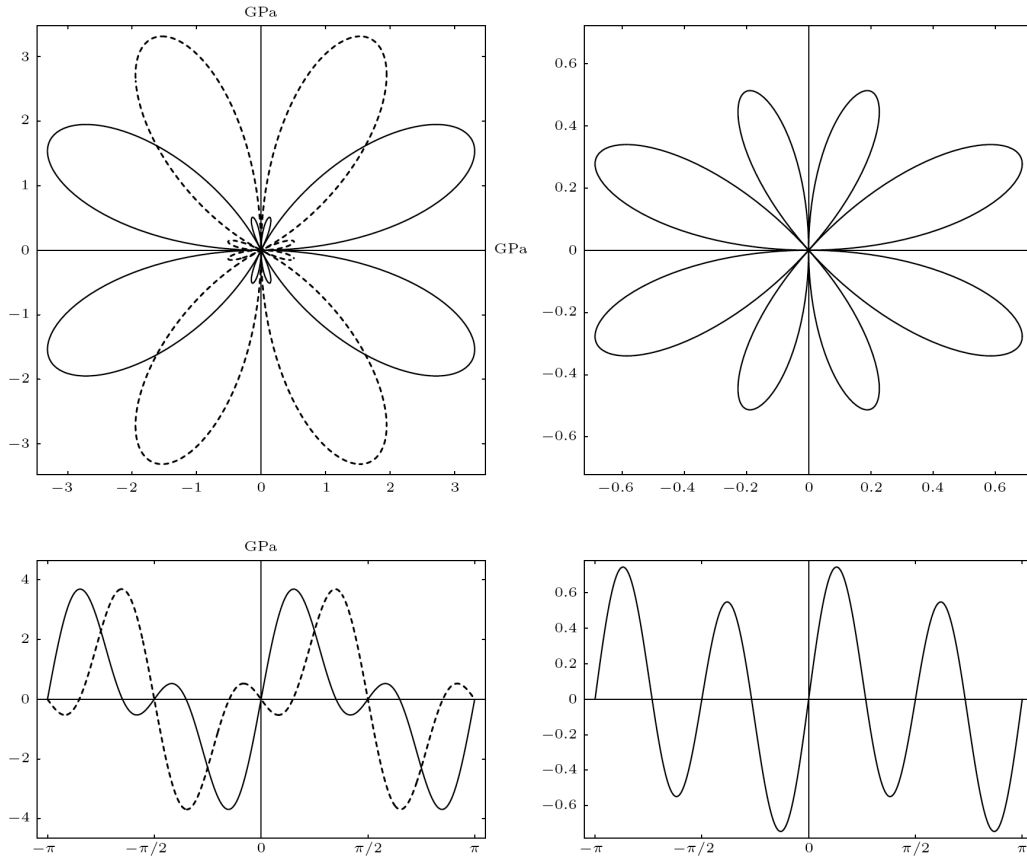


FIG. 2 – Représentation polaire (en haut) et cartésienne (en bas) des fonctions c_{1112}^4 (à gauche, en trait continu), c_{2212}^4 (à gauche, en pointillé) et ϖ (à droite).

FIG. 2 – Polar (upper) and Cartesian (lower) representation of functions c_{1112}^4 (left, solid line), c_{2212}^4 (left, dashed line), and ϖ (right).