SUR UNE PROPRIETE DES FONCTIONS PROPRES
DE L' OPERATEUR DE LAPLACE BELTRAMI

By

M. CHIPOT

ET

V. OLIKER

IMA Preprint Series # 260

August 1986

INSTITUTE FOR MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS
UNIVERSITY OF MINNESOTA
514 Vincent Hall
206 Church Street S.E.
Minneapolis, Minnesota 55455

- 120 D.R.J. Chillingworth, Three Introductory Lectures on Differential Topology and its Applications
- 121 Giorgio Vergara Caffarelli, Green's Formulas for Linearized Problems with Live Loads
- 122 F. Chiarenza and M. Garofalo, Unique Continuation for Nonnegative Solutions of Schrödinger Operators
- 123 J.L. Ericksen, Constitutive Theory for some Constrained Elastic Crystals
- 124 Minoru Murata, Positive solutions of Schrödinger Equations
- 125 John Maddocks and Gareth P. Parry, A Model for Twinning
- 126 M. Kaneko and M. Wooders, The Core of a Game with a Continuum of Players and Finite Coalitions: Nonemptiness with Bounded Sizes of Coalitions
- 127 William Zame, Equilibria in Production Economies with an Infinite Dimensional Commodity Space
- 128 Myrna Holtz Wooders, A Tiebout Theorem
- 129 Abstracts for the Workshop on Theory and Applications of Liquid Crystals
- 130 Yoshikazu Giga, A Remark on A Priori Bounds for Global Solutions of Semilinear Heat Equations
- 131 M. Chipot and G. Vergara-Caffarelli, The N-Membranes Problem
- 132 P.-L. Lions and P.E. Souganidis, Differential Games and Directional Derivatives of Viscosity Solutions of Isaacs' Equations II
- 133 G. Capriz and P. Giovine, On Virtual Effects During Diffusion of a Dispersed Medium in a Suspension
- 134 Fall Quarter Seminar Abstracts
- 135 Umberto Mosco, Wiener Criterion and Potential Estimates for the Obstacle Problem
- 136 Chi-Sing Men, Dynamic Admissible States, Negative Absolute Temperature, and the Entropy Maximum Principle
- 137 Abstracts for the Workshop on Oscillation Theory, Computation, and Methods of Compensated Compactness
- 138 Arle Leizerowitz, Tracking Nonperiodic Trajectories with the Overtaking Criterion
- 139 Arle Leizerowitz, Convex Sets in R^n as Affine Images of some Fixed Set in R^n
- 140 Arle Leizerowitz, Stochastic Tracking with the Overtaking Criterion
- 141 Abstracts from the Workshop on Amorphous Polymers and Non-Newtonian Fluids
- 142 Winter Quarter Seminar Abstracts
- 143 D.G. Aronson and J.L. Vazquez, The Porous Medium Equation as a Finite-speed Approximation to a Hamilton-Jacobi Equation
- 144 E. Sanchez-Palencia and M. Weinberger, On the Edge Singularities of a Composite Conducting Medium
- 145 Jon C. Luke, Soliton Solutions in a Class of Fully Discrete Nonlinear Wave Equations
- 146 Chi-Sing Men and M. Cohen, A Coordinate-Free Approach to the Kinematics of Membranes
- 147 J.L. Lions, Asymptotic Problems in Distributed Systems
- 148 Reiner Lauterbach, An Example of Symmetry Breaking with Submaximal Isotropy Subgroup
- 149 Abstracts from the Workshop on Metastability and Incompletely Posed Problems
- 150 B. Bozar-Karakiewicz and Jerry Bona, Wave-dominated Shelves: A Model of Sand-Ridge Formation by Progressive, Infragravity Waves
- 151 Abstracts from the Workshop on Dynamical Problems in Continuum Physics
- 152 W.I. Ollier, The problem of Embedding S^n into R^n with Prescribed Gauss
- 153 R. Bartra, The force on a Lattice Defect in an Elastic Body
- 154 J. Fleckinger and Michael Lapidus, Eigenvalues of Elliptic Boundary Value Problems with and Indefinite Weight Function
- 155 R. Kohn and M. Vogelius, Thin Plates with Rapidly Varying Thickness, and Their relation to Structural Optimization
- 156 M. Gurtin, Some Results and Conjectures in the Gradient Theory of Phase Transitions
- 157 A. Novick-Cohen, Energy Methods for the Cahn-Hilliard Equation
- 158 M. Bironi and U. Mosco, Wiener Estimates for Parabolic Obstacle Problems
- 159 E. Bennett and W. Zame, Prices and Bargaining in Cooperative Games
- 160 M.A. Harris and Y. Sibuya, The n -th Roots of Solutions of Linear Ordinary Differential Equations
- 161 Millard F. Beatty, Some Dynamical Problems in Continuum Physics
- 162 P. Bauman and D. Phillips, Large-Time Behavior of Solutions to a Scalar Conservation law in Several Space Dimensions
- 163 A. Novick-Cohen, Interfacial Instabilities in Directional Solidification of Dilute Binary Alloys: The Kuramoto-Sivashinsky Equation.
- 164 H.F. Weinberger, On Metastable Patterns in Parabolic Systems
- 165 D. Arnold and R.S. Falk, Continuous Dependence on the Elastic Coefficients for a Class of Anisotropic Materials
- 166 I.J. Bakelman, The Boundary Value Problems for Non-linear Elliptic Equation and the Maximum Principle for Euler-Lagrange Equations
- 167 Ingo Müller, Gases and Rubbers
- 168 Ingo Müller, Pseudoelecticity in Shape Memory Alloys - an Extreme Case of Thermoelasticity
- 169 Luis Magalhães, Persistence and Smoothness of Hyperbolic Invariant Manifolds for Functional Differential Equations
- 170 A. Demianien and M. Vogelius, Homogenization limits of the Equations of Elasticity in Thin Domains
- 171 H.C. Simpson and S.J. Spector, On Hadamard Stability in Finite Elasticity
- 172 J.L. Vazquez and C. Yavar, Isolated Singularities of the Solutions of the Schrödinger Equation with a Radial Potential
- 173 G. Dal Maso and U. Mosco, Wiener's Criterion and L^1 -Convergence
- 174 John H. Maddocks, Stability and Folds
- 175 R. Hardt and B. Kinderlehrer, Existence and Partial Regularity of Static Liquid Crystal Configurations
- 176 M. Nerukar, Construction of Smooth Ergodic Cycles for Systems with Fast Periodic Approximations
- 177 J.L. Ericksen, Stable Equilibrium Configurations of Elastic Crystals
- 178 Patricia Aviles, Local Behavior of Solutions of Some Elliptic Equations
- 179 S.-N. Chow and R. Lauterbach, A Bifurcation Theorem for Critical Points of Variational Problems
- 180 R. Pego, Phase Transitions: Stability and Admissibility in One Dimensional Nonlinear Viscoelasticity
- 181 Mariano Gagliante, Quadratic Functions and Partial Regularity
- 182 J. Bona, Fully Discrete Galerkin Methods for the Korteweg De Vries Equation
- 183 J. Maddocks and J. Keller, Mechanics of Robes
- 184 F. Bernis, Qualitative Properties for some nonlinear higher order
- 185 F. Bernis, Finite Speed of Propagation and Asymptotic Rates for some Nonlinear Higher Order Parabolic Equations with Absorption
- 186 S. Reichelstein and S. Reiter, Game Forms with Minimal Strategy Spaces
- 187 T. Ding, An Answer to Littlewood's Problem on Boundedness
- 188 J. Rubinstein and R. Maury, Dispersion and Convection in Periodic Media
- 189 W.H. Fleming and P.E. Souganidis, Asymptotic Series and the Method of Vanishing Viscosity
- 190 H. Beirão da Veiga, Existence and Asymptotic Behavior for Strong Solutions of Navier-Stokes Equations in the Whole Space
- 191 L.A. Caffarelli, J.L. Vazquez, and M.I. Molenskij, Lipschitz Continuity of Solutions and Interfaces of the N -Dimensional Porous Medium Equation
- 192 R. Johnson, m -functions and Floquet Exponents for Linear Differential System:
- 193 F.Y. Atkinson and L.A. Zepetler, Ground States and Dirichlet Problems for $-\Delta = F(U)$ in R^n
- 194 G. Dal Maso, U. Mosco, The Wiener Modulus of a Radial Measure
- 195 H. A. Levine and M.F. Weinberger, Inequalities between Dirichlet and Neuman Eigenvalues
- 196 J. Rubinstein, On the Macroscopic Description of Slow Viscous Flow Past a Random Array of Spheres
- 197 G. Dal Maso and U. Mosco, Wiener Criteria and Energy Decay for Relaxed Dirichlet Problems

SUR UNE PROPRIETE DES FONCTIONS PROPRES

DE L' OPERATEUR DE LAPLACE BELTRAMI

M. Chipot*

et

V. Olikar**

Institute for Mathematics and its Applications
University of Minnesota
514 Vincent Hall
206 Church St. S.E.
Minneapolis, MN, 55455 (USA)

* Adresse actuelle : Université de Metz - Département de Mathématiques
Ile du Saulcy - 57045 METZ CEDEX 1 (FRANCE)

** Adresse actuelle : Emory University. Department of Mathematics and Computer Science
Atlanta, GA, 30322 (USA)

Research of this author is supported
by the NSF Grants MCS-8301904
and MCS-8342997

0. Introduction

Au cours de notre séjour commun à Minneapolis, dans le cadre de l'institut, nous nous sommes intéressés au problème suivant : si M est une variété Riemannienne de dimension n , $n \geq 2$, et de métrique g , trouver toutes les fonctions régulières $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont valeurs propres ainsi que leur carré de l'opérateur de Laplace-Beltrami, Δ , associé à g ?

Plus précisément, si U est un ouvert connexe de M , on se propose de déterminer toutes les solutions du système :

$$\Delta F = \lambda F \quad \text{dans } U \quad (1)$$

$$\Delta F^2 = \mu F^2 \quad \text{dans } U \quad (2)$$

Ce problème, qui présente un certain intérêt en analyse harmonique (voir par exemple [S.S.]), a fait l'objet d'une étude dans [C.E.T.] et [T]. Commençons par rappeler quelques uns des résultats de [C.E.T.].

Tout d'abord si $M = \mathbb{R}^n$ et si F n'est pas identiquement nulle dans U alors on a nécessairement $\lambda \geq 0$, $\mu = 4\lambda$ et il existe $C \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$ tels que $|v|^2 = \lambda$ et

$$F(x) = C.e^{(x,v)} \quad \forall x \in U.$$

((.) désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, $||$ la norme associée).

Si maintenant M est l'espace hyperbolique de dimension n , réalisé par exemple par B_n la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$, alors le rôle des exponentielles de la géométrie euclidienne est joué par le noyau de Poisson hyperbolique lequel est défini pour $v \in S^{n-1}$ - la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ - par :

$$P_v(x) = \left(\frac{1-|x|^2}{|x-v|^2} \right)^{n-1} \quad \forall x \in B_n. \quad (3)$$

Plus précisément, le résultat principal de [C.E.T.] montre que si

$$\lambda > -\frac{1}{4}(n-1)^2, \quad \mu = 4\lambda + (n-1)^2 \left(1 + \varepsilon \sqrt{1 + \frac{4\lambda}{(n-1)^2}} \right), \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (4)$$

et si F vérifie (1) et (2) alors il existe $C \in \mathbb{R}$, $v \in S^{n-1}$ tels que

$$F(x) = C.(P_v(x))^{1/k} \quad \forall x \in U \quad (5)$$

où k est donné par

$$k = 2 \left(1 + \varepsilon \sqrt{1 + \frac{4\lambda}{(n-1)^2}} \right)^{-1}$$

et $k = 0$ si $\lambda = \mu = 0$.

En fait ce résultat est complété dans [CH] (cf. encore [C.E.T.] pour le cas $n=2$ et [T]). On peut en effet montrer que si F n'est pas identiquement nulle dans U alors nécessairement λ et μ vérifient (4) et naturellement l'on a encore (5).

Bien sûr, des deux cas envisagés ci-dessus-*ie.* $\mathbb{R}^n$ et le cas hyperbolique- c'est le second qui donne lieu à la plus grande difficulté et les techniques de [C.E.T.],[CH],[T] utilisent pour le résoudre un judicieux changement de coordonnées joint à des calculs très élaborés.

Dans cet article nous voudrions donner quelques généralisations des résultats précédents en utilisant en particulier des arguments de nature géométrique. Le cas de la dimension deux sera complètement élucidé. Il est clair qu'il y a des obstructions de nature géométrique à (1) et (2). En effet si par exemple $U=M$ et si M est une variété compacte sans bord alors d'après (2) ΔF^2 garde un signe constant et F^2 , d'où encore F , ne peut être que constante (cf.[C]). On notera que l'on raisonne ici sur F^2 qui est la puissance de F la plus simple possible (après F !) mais si F vérifie (1)(2) alors pour tout μ , F^μ est valeur propre pour Δ .

1. Préliminaires

On désignera par M une variété analytique de dimension n . On verra par la suite que cette hypothèse peut être affaiblie, néanmoins, elle permet de pouvoir appliquer le principe de prolongement analytique ce qui sera parfois commode. $u^1, u^2, \dots, u^n$ désignera un système de coordonnées locales sur M et

$\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n$ la base de vecteurs tangents correspondante dans TM, le fibré tangent à M. On supposera M munie d'une métrique riemannienne g et on posera $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, $i, j = 1, \dots, n$. (Dans la suite tout indice latin sera supposé variant de 1 à n). On notera pas ∇_k la dérivation covariante dans la direction k (voir par exemple [B]). Si Γ_{ij}^k désignent les symboles de Christoffel de seconde espèce associés à la métrique g les dérivées covariantes secondes d'une fonction F sont données par

$$\nabla_{ij} F = F_{ij} - \Gamma_{ij}^k F_k \quad (6)$$

où $F_k = \frac{\partial F}{\partial u^k}$, $F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}$. On désignera par Δ l'opérateur de Laplace Beltrami sur M i.e en faisant la convention des indices répétés et en coordonnées locales :

$$\Delta F = g^{ij} \nabla_{ij} F \quad (7)$$

où (g^{ij}) désigne la matrice inverse de la matrice (g_{ij}) et on posera

$$|\nabla F|^2 = g^{ij} F_i F_j \quad (8)$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 1 : Soient U un ouvert de M et F une fonction de U dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 , vérifiant (1)(2). Soit a $\in$ U un point où $F(a) > 0$. On peut alors définir dans un voisinage V de a inclu dans U

$$\varphi = \text{Log } F \quad (9)$$

et la fonction φ ainsi définie vérifie :

$$|\nabla \varphi|^2 = \frac{\mu - 2\lambda}{2} \quad \text{dans } V \quad (10)$$

$$\Delta \varphi = \frac{4\lambda - \mu}{2} \quad \text{dans } V \quad (11)$$

Démonstration : Puisque F est continue il est clair que F est strictement positive dans un voisinage V de a sur lequel on peut définir $\varphi = \text{Log } F$. On a alors dans V

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} = \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial u^i} = \frac{F_{,i}}{F} \quad (12)$$

$$\varphi_{,ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial u^i} \frac{\partial F}{\partial u^j} = \frac{F_{,ij}}{F} - \frac{F_{,i} F_{,j}}{F^2} \quad (13)$$

D'autre part on vérifie aisément que

$$\nabla_{ij} F^2 = 2F \nabla_{ij} F + 2 F_{,i} F_{,j}$$

et de (1)(2) on déduit

$$\mu F^2 = \Delta F^2 = 2F \Delta F + 2 |\nabla F|^2 = 2\lambda F^2 + 2 |\nabla F|^2$$

Ce qui donne

$$|\nabla F|^2 = \frac{\mu - 2\lambda}{2} F^2$$

Reprenant (12) et (13) on obtient dans V

$$|\nabla \varphi|^2 = \frac{|\nabla F|^2}{F^2} = \frac{\mu - 2\lambda}{2}$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{F} \Delta F - \frac{|\nabla F|^2}{F^2} = \lambda - \frac{\mu - 2\lambda}{2} = \frac{4\lambda - \mu}{2}$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

Posons :

$$\text{Hess } \varphi = (\nabla_{ij} \varphi)$$

$$|\text{Hess } \varphi|^2 = g^{ks} g^{ij} \nabla_{ki} \varphi \nabla_{sj} \varphi$$

Remarque 1 : La quantité ci-dessus est positive. De plus elle ne s'annule que si $\nabla_{ij} \varphi = 0 \forall i, j$. En effet pour le voir, en faisant éventuellement un changement de coordonnées $u^1, u^2, \dots, u^n$ par une transformation linéaire, on peut supposer que l'on a au point que l'on considère $(g^{ij}) = I$ où I est la matrice de l'identité. On a alors

$$|\text{Hess } \varphi|^2 = \sum_{s,i} (\nabla_{si} \varphi)^2$$

et le résultat en découle.

On désigne par R_{ij} le tenseur de Ricci associé à g et défini par

$$R_{ij} = R_{ijk}^k \quad (15)$$

où R_{ijk}^ℓ sont les symboles de Riemann de seconde espèce définis par (cf. [E]) :

$$R_{ijk}^\ell = g^{\ell m} R_{mijk} \quad (16)$$

On a alors :

Lemme 2 : Soit φ une fonction vérifiant (10)(11). On a

$$|\text{Hess } \varphi|^2 - R_{ij} c^i c^j = 0 \quad \text{dans } V \quad (17)$$

avec $c^i = g^{ij} \varphi_j$.

Démonstration : On utilise les règles usuelles de dérivation covariante (voir par exemple [E] section 11) et de (10) on déduit

$$\begin{aligned} &= \Delta \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 = \frac{1}{2} g^{ks} \nabla_s (\nabla_k g^{ij} \varphi_i \varphi_j) \\ &= \frac{1}{2} g^{ks} \nabla_s (g^{ij} \nabla_{ki} \varphi \varphi_j + g^{ij} \varphi_i \nabla_{kj} \varphi) \\ &= \frac{1}{2} g^{ks} g^{ij} (\nabla_s \nabla_{ki} \varphi \varphi_j + \nabla_{ki} \varphi \nabla_s \varphi_j + \nabla_{sj} \varphi \nabla_{si} \varphi \nabla_{kj} \varphi + \varphi_i \nabla_s \nabla_{kj} \varphi) \\ &= |\text{Hess } \varphi|^2 + g^{ks} \nabla_s \nabla_{ki} \varphi g^{ij} \varphi_j \quad (18) \end{aligned}$$

Utilisant l'identité de Ricci (cf. [E])

$$\nabla_s \nabla_{ki} \varphi = \nabla_i \nabla_{ks} \varphi - R_{ski}^\ell \varphi_\ell$$

on obtient

$$\begin{aligned} g^{ks} \nabla_s \nabla_{ki} \varphi &= \nabla_i (\Delta \varphi) - g^{ks} R_{ski}^\ell \varphi_\ell \\ &= -g^{ks} g^{\ell m} R_{mski} \varphi_\ell \quad (\text{d'après (11) et (16)}) \\ &= -g^{sk} R_{kims} g^{m\ell} \varphi_\ell = -R_{im} g^{m\ell} \varphi_\ell \end{aligned}$$

En utilisant cette égalité dans (18) le résultat en découle.

2. Cas où le tenseur de Ricci est négatif

2.1. Cas où le tenseur de Ricci est défini négatif en un point

Dans ce cas les lemmes 1 et 2 permettent de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 : Soit $F \neq 0$ une fonction de classe C^2 vérifiant (1)(2). Si en un point de U le tenseur de Ricci associé à g est défini négatif alors on a nécessairement $\lambda = \mu = 0$ et

$$F = \text{cste dans } U.$$

Démonstration : Si le tenseur de Ricci est défini négatif en un point de U on peut supposer par continuité que celui-ci est défini négatif dans un ouvert U' de U . Comme $F \neq 0$ on a $F(a) \neq 0$ pour un certain $a \in U'$. (En effet on remarque que comme solution du problème elliptique (1), F est analytique dans U et si $F \equiv 0$ dans U' on aurait par prolongement analytique $F \equiv 0$ dans U ce qui est contraire à nos hypothèses). Remplaçant éventuellement F par $-F$, qui vérifie également (1)(2), on peut supposer $F(a) > 0$. D'après les lemmes 1 et 2 dans un voisinage V de a inclu dans U' la fonction $\varphi = \log F$ vérifie (17). Or comme le tenseur de Ricci R_{ij} est défini négatif dans V ceci n'est possible que si $C^i \equiv 0$ dans V , ie $\varphi \equiv \text{Cste}$. Le résultat en découle.

2.2. Cas de la courbure constante

Dans ce cas, si K désigne la courbure de Gauss, on a :

$$R_{hijk} = K(g_{hj} g_{ik} - g_{hk} g_{ij})$$

D'après (16) on déduit :

$$\begin{aligned} R_{ijk}^{\ell} &= K g^{\ell h} (g_{hj} g_{ik} - g_{hk} g_{ij}) \\ &= K (\delta_j^{\ell} g_{ik} - \delta_k^{\ell} g_{ij}) \end{aligned}$$

où δ_j^{ℓ} est le tenseur de Kronecker. D'où d'après (15)

$$\begin{aligned} R_{ij} &= K (\delta_j^k g_{ik} - \delta_k^k g_{ij}) \\ &= -K(n-1) g_{ij} \end{aligned}$$

Comme corollaire immédiat du théorème 1 on a alors :

Corollaire 1 : Soit $F \neq 0$ une fonction de classe C^2 vérifiant (1)(2). Si dans un ouvert $V \subset U$ la courbure de Gauss K est constante strictement positive alors $\lambda = \mu = 0$ et

$$F = \text{cste dans } U$$

Dans le cas où K est nulle on peut montrer :

Théorème 2 : Soit $F \neq 0$ une fonction de classe C^2 vérifiant (1)(2). Si dans un ouvert $V \subset U$ la courbure de Gauss K est constante égale à 0 alors $\lambda \geq 0$,

$\mu = 4\lambda$ et il existe $C \in \mathbb{R}$ $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$F(u^1, \dots, u^n) = Ce^{(u^i v_i)} \quad (20)$$

Démonstration : Raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1 on se ramène au voisinage d'un point $a \in U$ où $F(a) > 0$. D'après (17) et (19) on en déduit que la fonction $\varphi = \log F$ vérifie $|\text{Hess } \varphi|^2 = 0$. D'où (cf. la remarque 1) $\nabla_{ij} \varphi = 0 \quad \forall i, j$.

Comme $K \equiv 0$ ceci implique $\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \equiv 0$ au voisinage de a . (voir par exemple [SP2]). On en déduit que φ est une fonction affine et le résultat en découle.

Le cas où K est strictement négatif sera abordé au paragraphe 4.

3. Le cas particulier de la dimension 2

On suppose donc dans cette partie $n=2$. On a alors

Lemme 3 : Soit φ une fonction vérifiant (10)(11) si $\mu \neq 2\lambda$, on a

$$|\text{Hess } \varphi|^2 = \left(\frac{\mu - 4\lambda}{2}\right)^2 \quad \text{dans } V \quad (21)$$

Démonstration : Utilisant les règles de dérivation covariante, de (10) on déduit

$$0 = \nabla_s \left(\frac{1}{2} g^{ij} \varphi_i \varphi_j \right) = g^{ij} \varphi_j \nabla_{si} \varphi \quad s=1,2$$

D'où en posant $C^i = g^{ij} \varphi_j$ on a dans V

$$C^1 \nabla_{11} \varphi + C^2 \nabla_{12} \varphi = 0$$

$$C^1 \nabla_{21} \varphi + C^2 \nabla_{22} \varphi = 0$$

Comme $\mu \neq 2\lambda$, $(C^1, C^2) \neq 0$ et le système ci-dessus ayant une solution non triviale (C^1, C^2) on a nécessairement dans V :

$$\nabla_{11} \varphi \nabla_{22} \varphi = \nabla_{12} \nabla_{21} \varphi$$

Choisisant alors, par exemple, des coordonnées locales telles que au point considéré $g^{ij} = I$ (cf. la remarque 1) on a

$$|\text{Hess } \varphi|^2 = \sum_{s,i} (\nabla_{si} \varphi)^2 = (\nabla_{11} \varphi + \nabla_{22} \varphi)^2 = \Delta \varphi^2 = \left(\frac{\mu-4\lambda}{2}\right)^2$$

ce qui termine.

En dimension 2 on peut alors montrer le résultat définitif suivant :

Théorème 3 : Soit $F \neq 0$ une fonction de classe C^2 vérifiant (1)(2). On a alors

ou bien $\lambda = \mu = 0$ et $F = \text{cste}$

ou bien la courbure de Gauss K associée à g est constante, négative ou nulle et l'on a

$$(\mu-4\lambda)^2 + 2K(\mu-2\lambda) = 0 \quad (22)$$

Démonstration : En raisonnant comme précédemment si $F \neq 0$ on peut introduire au voisinage d'un point $a \in U$, $\varphi = \text{Log } F$. Si F n'est pas localement constante on a d'après le lemme 1, $\mu \neq 2\lambda$ d'où en appliquant les lemmes 2 et 3

$$\left(\frac{\mu-4\lambda}{2}\right)^2 - R_{ij} C^i C^j = 0$$

Or pour $n=2$ et si K désigne la courbure de Gauss on a (cf. [E])

$$R_{ij} = -K g_{ij}$$

D'où comme $C^i = g^{i\ell} \varphi_{,\ell}$ il vient

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu-4\lambda}{2}\right)^2 + K g_{ij} g^{i\ell} \varphi_{,\ell} g^{jk} \varphi_{,k} &= 0 \\ \left(\frac{\mu-4\lambda}{2}\right)^2 + K g^{jk} \varphi_{,j} \varphi_{,k} &= 0 \\ \left(\frac{\mu-4\lambda}{2}\right)^2 + K \left(\frac{\mu-2\lambda}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Comme $\mu \neq 2\lambda$ on en déduit $K = \text{cste}$ au voisinage de a et donc dans U . Si $K > 0$ on est dans le cas du corollaire 1 et F est constante ce que l'on a exclu. On a donc $K \leq 0$ et (23) n'est autre que (22).

Remarque 2 : Le cas $K = 0$ a déjà été étudié au théorème 2. On a dans ce cas

$\lambda \geq 0$, $\mu = 4\lambda$ et F est donnée en coordonnées locales par (20).

Le cas où $K < 0$ sera étudié au paragraphe suivant. Notons que (22) s'écrit encore

$$\mu^2 - 2\mu(4\lambda - K) + 4\lambda(4\lambda - K) = 0$$

Pour que cette équation admette des racines réelles (en μ) on doit avoir

$$\lambda \geq K/4$$

et l'on a alors

$$\mu = 4\lambda - K \pm \sqrt{-K(4\lambda - K)}.$$

Dans le cas $K = -1$, on retrouve alors (4) ($n=2$).

4. Cas de la courbure constante négative

On suppose ici pour simplifier que $K = -1$ et U désigne un ouvert connexe de H^n l'espace hyperbolique de dimension n . Supposons par exemple que H^n soit réalisé comme le demi-espace

$$H^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_n > 0\}$$

muni de la métrique définie par

$$g_{ij} = \delta_{ij} / (x_n)^2 \quad (24)$$

Si les Γ_{ijk} désignent les symboles de Christoffel de 1ère espèce, Γ_{ij}^k ceux de seconde espèce on a par un calcul élémentaire :

$$\Gamma_{ii}^k = g^{k\ell} \Gamma_{iil} = x_n^2 \Gamma_{iik} = x_n^2 \cdot \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k} \right)$$

D'où compte tenu de (24) :

$$\Gamma_{ii}^k = 0 \quad \text{si } k \neq n, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Gamma_{ii}^n = \frac{1}{x_n} \quad \forall i \neq n, \quad \Gamma_{nn}^n = -\frac{1}{x_n}$$

L'opérateur de Laplace Beltrami s'écrit alors (voir (6)(7))

$$\Delta \varphi = g^{ii} \nabla_{ii} \varphi = x_n^2 \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2} - \frac{n-2}{x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right]$$

On a également

$$|\nabla\varphi|^2 = x_n^2 \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right)^2$$

Il est facile de voir que les seules fonctions φ indépendantes de $x_1, \dots, x_{n-1}$ et vérifiant localement (10)(11) sont données par

$$= \pm \left(\frac{\mu - 2\lambda}{2} \right)^{1/2} \text{Log } x_n + \text{cste} \quad (25)$$

et ceci impose la condition

$$(\mu - 4\lambda)^2 = 2(n-1)^2(\mu - 2\lambda) \quad (26)$$

(Ces fonctions sont constantes sur les hyperplans de même cote).

Réciproquement, on va montrer que, à une isométrie près, toute solution de (10)(11) est de ce type et la contrainte (26) est absolument nécessaire à l'existence d'une telle fonction. Plus précisément si l'on suppose H^n réalisé par B^n la boule unité de $\mathbb{R}^n$ (cf SP_4) on a

Théorème 4 : Soit φ une fonction réelle solution de (10)(11) sur V connexe, alors λ, μ sont liés par (26) et φ est constante sur des horosphères parallèles.

Démonstration : Posons pour simplifier

$$\left(\frac{\mu - 2\lambda}{2} \right) = \xi \geq 0 \quad \frac{4\lambda - \mu}{2} = \eta \quad (27)$$

Si φ est constante dans V le résultat est clair. Si φ n'est pas constante on se place au voisinage d'un point où

$$|\nabla\varphi|^2 = \xi > 0 \quad (28)$$

Comme $|\nabla\varphi| \neq 0$ en utilisant le théorème de fonctions implicites on montre sans peine qu'il existe un système de coordonnées locales orthogonales $(u^1, \dots, u^{n-1}, \rho)$ dans un ouvert que l'on note encore V - bien qu'il puisse être strictement inclu dans V - tel que

$$\pm \sqrt{\xi} \rho = \varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(u^1, \dots, u^{n-1}, \rho) \quad (29)$$

Dans ce système de coordonnées la métrique devient

$$ds^2 = f_{\rho\rho} d\rho^2 + \sum_{i=1}^{n-1} f_{ii}(u^1, \dots, u^{n-1}, \rho) du^i{}^2$$

où les fonctions $f_{\rho\rho}$, f_{ii} sont strictement positives. En désignant par f^{ij} l'inverse de la matrice f_{ij} on a immédiatement

$$f_{\rho\rho} = 1/f^{\rho\rho} = 1/g^{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = 1$$

ceci grace à (28)(29).

Montrons alors le lemme suivant :

Lemme 4 : Les constantes μ et λ sont liées par (26) et il existe $\varepsilon = \pm 1$ tel que l'on ait

$$f_{ii}(u^1, \dots, u^{n-1}, \rho) = e^{\varepsilon 2\rho} h_{ii}(u^1, \dots, u^{n-1}) \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (30)$$

où les fonctions h_{ii} sont des fonctions strictement positives.

Démonstration du lemme

Etape 1 : On écrit (11) en coordonnées locales $(u^1, \dots, u^{n-1}, \rho)$

Pour cela on remarque que les symboles de Christoffel sont donnés par

$$\Gamma_{\rho\rho}^{\rho} = g^{\rho k} \Gamma_{\rho\rho k} = \Gamma_{\rho\rho\rho} = \frac{1}{2} \frac{\partial f_{\rho\rho}}{\partial \rho} = 0$$

$$\Gamma_{ii}^{\rho} = g^{\rho k} \Gamma_{iik} = \Gamma_{ii\rho} = \frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial f_{i\rho}}{\partial u^i} - \frac{\partial f_{ii}}{\partial \rho} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial f_{ii}}{\partial \rho} \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

D'où compte tenu de (27)(29) il vient

$$\eta = \Delta\varphi = \pm \sqrt{\xi} \Delta\rho = \pm \sqrt{\xi} \sum_{i=1}^{n-1} f^{ii} \Gamma_{ii}^{\rho} = \pm \sqrt{\frac{\xi}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{f_{ii}} \frac{\partial f_{ii}}{\partial \rho} \quad (31)$$

Etape 2 : On utilise le fait que la courbure est constante égale à -1 . On a en particulier pour $i=1, \dots, n-1$

$$R_{\rho i i \rho} = -(f_{\rho i} f_{i \rho} - f_{\rho \rho} f_{i i}) = f_{i i}$$

D'autre part (cf [E] p.44)

$$R_{\rho i i \rho} = \sqrt{f_{i i}} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\sqrt{f_{i i}} \right)$$

d'où l'on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\sqrt{f_{i i}} \right) = \sqrt{f_{i i}}$$

Il existe donc deux fonctions $A_{i i} = A_{i i}(u^1, \dots, u^{n-1})$, $B_{i i} = B_{i i}(u^1, \dots, u^{n-1})$, telles que

$$\sqrt{f_{i i}} = A_{i i} e^{\rho} + B_{i i} e^{-\rho} \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (32)$$

Etape 3 : On montre que dans la formule ci-dessus les $A_{i i}$ ou les $B_{i i}$ sont nuls. Pour cela

Pour cela en posant $\gamma = n/\pm\sqrt{\xi}$ on remarque que (31) s'écrit compte tenu de (32)

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{i i} e^{\rho} - B_{i i} e^{-\rho}}{A_{i i} e^{\rho} + B_{i i} e^{-\rho}}}{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{i i} e^{\rho} - B_{i i} e^{-\rho}}{A_{i i} e^{\rho} + B_{i i} e^{-\rho}}}$$

L'égalité ci-dessus est valable pour $(u_1, \dots, u_{n-1}, \rho)$ dans V . A $u_1, \dots, u_{n-1}$ fixés elle a donc lieu pour ρ dans un certain intervalle. Sur cet intervalle les deux fonctions ci-dessus sont analytiques et γ est bien évidemment analytique sur $\mathbb{R}$ tout entier. Il en résulte que les deux fonctions sont analytiques sur $\mathbb{R}$ et leur égalité a lieu sur tout $\mathbb{R}$. Faisant tendre ρ vers $\pm \infty$ il vient :

$$\gamma = \sum_{A_{i i} \neq 0} 1 = - \sum_{B_{i i} \neq 0} 1$$

d'où nécessairement tous les $A_{i i}$ ou tous les $B_{i i}$ sont nuls (sans quoi γ serait à la fois positif et négatif) ceci entraîne $\gamma = \pm(n+1)$ soit encore

$\eta = \pm \sqrt{\xi(n-1)}$ qui n'est autre que (26) et grace à (32)

$$f_{ii}(u^1, \dots, u^{n-1}, \rho) = e^{\varepsilon 2\rho} h_{ii}(u^1, \dots, u^{n-1}) \quad \varepsilon = \pm 1$$

avec $h_{ii} = A_{ii}^2$ ou B_{ii}^2 . Ceci termine la démonstration du lemme. Notons que par le principe du prolongement analytique (30) est vrai dans tout V puisque l'on a supposé au préalable V connexe.

Pour terminer la démonstration du théorème 4 il nous suffit maintenant compte tenu de (29) de montrer :

Lemme 5 : Les surfaces de niveau $\rho = \text{cste}$ sont des horosphères parallèles.

Démonstration : La seconde forme fondamentale d'une telle hypersurface S_ρ est donnée par

$$b_{ij} = \langle \partial_{ij}, \partial \rho \rangle = \Gamma_{ij}^\rho = -\frac{1}{2} \frac{\partial f_{ij}}{\partial \rho}$$

D'où du lemme 4 on déduit

$$b_{ij} = \begin{cases} \varepsilon e^{\varepsilon 2\rho} h_{ii}(u^1, \dots, u^{n-1}) & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

soit encore :

$$b_{ij} = \varepsilon f_{ij} \text{ avec } \varepsilon = \pm 1.$$

Tout point de S_ρ est donc un ombilic et S_ρ est donc une portion de sphère, horosphère ou hypersurface équidistante (Voir $[SP_4]$ p.114). Comme d'autre part la courbure d'une telle surface est donnée par

$$K = \varepsilon^2 - 1 = 0$$

celle-ci ne peut être qu'une portion d'horosphère (cf. $[SP_4]$). Ceci termine la démonstration du lemme et du théorème 4.

Remarque 3 : Lorsque l'on réalise une inversion isométrique par rapport au point de base de ces horosphères (cf. $[Sp_4]$ p.20) il est clair que φ se trans-

forme en une fonction constante sur les hyperplans $x_n = \text{cste}$ et le transformé de φ est donc du type (25). Si maintenant l'on remarque que pour toute transformation orthogonale de B_n une solution de (10)(11) est encore solution et si l'on revient à F en prenant l'exponentielle dans (25) on retrouve (5) sous une autre forme.

Remerciements

Ce travail a été réalisé en partie durant notre séjour à l'Institut de Mathématiques de Minneapolis. Nous remercions vivement cette institution pour son aide et son atmosphère chaleureuse.-

. Bibliographie

- [B] W.M. BOOTHBY : An introduction to differentiable manifold and Riemannian Geometry. Academic Press (1975)
- [C] B.Y. CHEN : Geometry of Submanifolds. M. DEKKER, New-York (1973)
- [CH] M. CHIPOT : résultat non publié.
- [C.E.T.] M. CHIPOT - P. EYMARD - T. TAHANI : Sur les fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami dont le carré est fonction propre (A paraître dans Symposia in Pure Math. Academic Press)
- [E] L.P. EISENHART : Riemanian Geometry. Princeton University Press (1949)
- [S.S.] M.B. SAKE - T.O. SHERMAN : Hilbert and Fourier transforms on a Sphere. Siam J. of Anal. - vol. 15, n° 3 (1984) p. 605-620.
- [SPi] M. SPIVAK : A comprehensive introduction to differential geometry. Publish or Perish Inc. (1979) Vol i.
- [T] T. TAHANI : Fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami dans les boules hyperboliques réelles ou complexes. Thèse de 3me cycle. Université de Nancy I (1985)
-